УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.76

О ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ НА ШЕСТИМЕРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ СФЕР

Н.К. Смоленцев

Аннотация

В данной статье рассматриваются почти комплексные структуры на сфере S^6 и на произведениях сфер $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$, которые естественно возникают при их вложении в алгебру октав Кэли. Показано, что все они являются неинтегрируемыми. В каждом случае получены выражения фундаментальной формы ω через калибровки пространства $\mathbb{R}^7$, вычислен тензор Нейенхейса. Показана невырожденность формы $d\omega$ и построены новые особые почти комплексные структуры на произведениях сфер.

Ключевые слова: шестимерные многообразия, почти комплексные структуры, числа Кэли, векторное произведение.

---

1. Предварительные сведения

Хорошо известно [1], что на ориентируемом шестимерном подмногообразии M в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a}$ чисел Кэли может быть определена почти комплексная структура при помощи трехместного векторного произведения. Такая почти комплексная структура Кэли достаточно активно изучается в случае сферы $S^6 \subset \mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$, [2–6]. Структуры Кэли на произведениях сфер $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$ пока не столь популярны. Напомним, что на произведениях нечетномерных сфер имеется комплексная структура, определенная Екманом и Калаби [7] (см. также [8]). Для произведений четномерных сфер ситуация значительно сложнее. Единственный нетривиальный случай существования почти комплексной структуры на произведениях четномерных сфер дает произведение $S^2 \times S^4$ [9]. Вопрос о существовании интегрируемой почти комплексной структуры в настоящее время открыт как для $S^2 \times S^4$, так и для S^6. Известно, что ортогональные почти комплексные структуры J на S^6 со стандартной метрикой g_0 неинтегрируемы [5]. В работе [10] показано, что неинтегрируемыми будут почти комплексные структуры J, ортогональные относительно метрик, близких к стандартной. Среди ортогональных почти комплексных структур J на (S^6, g_0) почти комплексная структура Кэли J_c занимает особое место. В работе [4] показано, что для структуры Кэли объем многообразия $J_c(S^6)$ в пространстве ортогональных комплексных структур в $\mathbb{R}^8$ является минимальным среди всех других ортогональных почти комплексных структур на S^6. В работе [11] для структуры Кэли J_c на сфере S^6 получены явные выражения для фундаментальной формы и ее внешнего дифференциала через калибровки пространства $\mathbb{R}^7$, найден тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение и показано, что фундаментальная форма ω является собственной для оператора Лапласа.

1.1. Числа Кэли. Пусть $\mathbb{C}\mathrm{a}$ – алгебра чисел Кэли, то есть чисел вида $x = x^0 + x^1 e_1 + \dots + x^7 e_7$, где $x^i \in \mathbb{R}$, а числа $e_1, \dots, e_7$ – мнимые единицы. Правила их перемножения определяются следующей таблицей:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Если $x^0 = 0$, то число Кэли x называется чисто мнимым. Будем записывать число Кэли x в виде $x = x^0 + X$, где x^0 – действительная часть и $X = x^1 e_1 + \dots + x^7 e_7$ – чисто мнимая часть. Алгебра Кэли $\mathbb{C}\mathrm{a}$ имеет операцию сопряжения: $\overline{x} = x^0 - X$, которая обладает свойством $\overline{x}\ \overline{y} = \overline{yx}$ и позволяет определить естественным образом скалярное произведение и норму: $\langle x, y\rangle = (x\overline{y} + y\overline{x})/2$, $|x|^2 = x\overline{x}$. Формула $X \times Y = (XY - YX)/2$ определяет векторное произведение в пространстве $\mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$ чисто мнимых чисел Кэли.

Алгебра чисел Кэли $\mathbb{C}\mathrm{a}$ неассоциативна, то есть $(xy)z \neq x(yz)$. *Ассоциатором* называется выражение $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$. Ассоциатор кососимметричен по всем аргументам, что сразу следует из следующих хорошо известных свойств алгебры Кэли:

– альтернативности: $(xx)y = x(xy)$, $x(yy) = (xy)y$, $x(yx) = (xy)x$, то есть $[x, x, y] = 0$, $[x, y, y] = 0$, $[x, y, x] = 0$, а также $(x\overline{x})y = x(\overline{x}y)$, $x(\overline{y}y) = (x\overline{y})y$, то есть $[x, \overline{x}, y] = 0$ и $[x, \overline{y}, y] = 0$;

– тождеств Муфанг: $((xy)z)y = x(yzy)$, $(xyx)z = x(y(xz))$, $(xy)(zx) = x(yz)x$;

– иордановости: $(xxy)x = xx(yx)$, то есть $[xx, y, x] = 0$.

Напомним еще ряд свойств алгебры Кэли: $\langle xy, zy\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, y\rangle$, $\langle xw, y\rangle = \langle x, y\overline{w}\rangle$, $\langle wx, y\rangle = \langle x, \overline{w}y\rangle$, $(xu)\overline{v} + (xv)\overline{u} = 2x\langle u, v\rangle$, $u(\overline{v}x) + v(\overline{u}x) = 2x\langle u, v\rangle$.

1.2. Векторное произведение в $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$. Пространство $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$ мнимых октав наследует из $\mathbb{C}\mathrm{a}$ скалярное произведение $\langle X, Y\rangle$ и векторное произведение $X \times Y$, которые определяются как вещественная и чисто мнимая части произведения мнимых чисел XY:

$$\langle X, Y\rangle = -\mathrm{Re}\,(XY), \quad X \times Y = \mathrm{Im}\,(XY).$$

Это сразу следует из формулы: $xy = (x^0 y^0 - \langle X, Y\rangle) + x^0 Y + y^0 X + X \times Y$. Легко видеть, что векторное произведение $X \times Y$ билинейно, кососимметрично и ортогонально каждому их сомножителей. Отметим также, что ортогональные чисто мнимые числа Кэли X и Y антикоммутируют, поскольку для них $XY = X \times Y$.

Смешанное произведение определяется равенством $(XYZ) = \langle X, Y \times Z\rangle = \langle X \times Y, Z\rangle$ и представляет собой кососимметричную 3-форму φ, которая называется *ассоциативной калибровкой* [12] пространства $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$:

$$\varphi(X, Y, Z) = \langle X, Y \times Z\rangle. \tag{1}$$

Если $\omega_{pqr} = dx_p \wedge dx_q \wedge dx_r$, то калибровка φ имеет следующее представление:

$$\varphi = \omega_{123} - \omega_{167} + \omega_{257} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246} + \omega_{347}. \tag{2}$$

Тройное векторное произведение определяется равенством

$$[XYZ] = (X \times Y) \times Z - \langle X, Z\rangle Y + \langle Y, Z\rangle X = -X \times (Y \times Z) + \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z. \tag{3}$$

Оно связано с ассоциатором формулой $[X,Y,Z]=2[XYZ]$.

Нам потребуются также следующие свойства векторного произведения, которые сразу получаются из равенства (3).

Если $n,Y,Z\in\mathbb{R}^7$ и если $Y,Z\perp n$, то

$$(n\times Y)\times Z=-n\times(Y\times Z)-\langle Y,Z\rangle n.$$

Если n – чисто мнимый вектор единичной длины, то для любого $Z\in\mathbb{R}^7$

$$n\times(n\times Z)=-Z+\langle n,Z\rangle n.$$

Отсюда следует, что для любых $X,Y\in\mathbb{R}^7$ имеет место равенство

$$\langle n\times X,n\times Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\langle X,n\rangle\langle Y,n\rangle.$$

Коассоциативная калибровка [12] пространства $\mathbb{R}^7=\mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$ – это внешняя 4-форма ψ, определенная равенством

$$\psi(X,Y,Z,W)=\frac{1}{2}\langle X,[Y,Z,W]\rangle=\langle X,[YZW]\rangle. \tag{4}$$

Калибровка ψ имеет следующее представление в стандартных координатах $\mathbb{R}^7$:

$$\psi=\omega_{4567}-\omega_{4523}-\omega_{4163}-\omega_{4127}+\omega_{2367}+\omega_{1357}+\omega_{1256}. \tag{5}$$

Легко видеть, что формы φ и ψ связаны соотношением $\psi=*\varphi$, где $*$ – оператор Ходжа.

1.3. Векторное произведение на алгебре Кэли. Напомним, что векторным (r-местным) произведением на n-мерном евклидовом пространстве V называется [1] полилинейное отображение $P:V^r\to V$, $r=1,\dots,n$, обладающее свойствами:

$$\langle P(x_1,\dots,x_r),x_i\rangle=0,\ i=1,\dots,r,$$
$$\|P(x_1,\dots,x_r)\|^2=\det(\langle x_i,x_j\rangle).$$

Одноместное векторное произведение на V есть ортогональная комплексная структура J. Двухместное векторное произведение существует только в размерности 3 и 7. На семимерном пространстве V двухместное векторное произведение изоморфно введенному выше векторному произведению на пространстве $\mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$ чисто мнимых чисел Кэли. Как известно [1], на алгебре Кэли $\mathbb{C}\mathrm{a}$ трехместное векторное произведение определено формулами:

$$P(x,y,z)=-(x\overline{y})z+\langle x,y\rangle z+\langle y,z\rangle x-\langle z,x\rangle y, \tag{6}$$

$$P_1(x,y,z)=-x(\overline{y}z)+\langle x,y\rangle z+\langle y,z\rangle x-\langle z,x\rangle y,$$

Легко видеть, что операция сопряжения определяет антиизоморфизм этих векторных произведений: $P_1(x,y,z)=-\overline{P(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать на $\mathbb{C}\mathrm{a}$ только первое векторное произведение P, заданное формулой (6).

Из свойств векторного произведения сразу следует, что 4-форма

$$\Phi(x,y,z,u)=\langle P(x,y,z),u\rangle \tag{7}$$

является кососимметрической. Если $x=1$, а $x=X$ и $y=Y$ – чисто мнимые, то формула (6) определяет векторное произведение на $\mathbb{R}^7$: $P(1,Y,Z)=YZ+\langle Y,Z\rangle=Y\times Z$. Поэтому $\Phi(1,Y,Z,U)=\langle Y\times Z,U\rangle=\varphi(Y,Z,U)$. В случае, когда все векторы X, Y, Z, U являются чисто мнимыми и взаимно ортогональными, то $\Phi(X,Y,Z,U) = \langle (X \times Y) \times Z, U\rangle = \psi(X,Y,Z,U)$. Следовательно, имеет место формула

$$\Phi = dx_0 \wedge \varphi + \psi, \tag{8}$$

где φ и ϕ – введенные ранее ассоциативная и коассоциативная калибровки. Легко также видеть, что форма Φ является антиавтодуальной: $*\Phi = -\Phi$.

Понятие векторного произведения естественно определяется и на римановых многообразиях. При этом имеет место следующее свойство.

Теорема 1 [1]. *Пусть P_M – r-местное векторное произведение на римановом многообразии M, а N – ориентируемое подмногообразие коразмерности k в M. Тогда P_M определяет $(r-k)$-местное векторное произведение P_N на подмногообразии N по формуле*

$$P_N(X_1,\ldots,X_{r-k}) = P_M(n_1,\ldots,n_k,X_1,\ldots,X_{r-k}),$$

где $n_1,\ldots,n_k$ – локально определенный ортонормированный базис нормального расслоения к подмногообразию N.

Из этой теоремы следует, что любое семимерное ориентируемое подмногообразие M^7 в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ имеет двухместное векторное произведение, а любое шестимерное ориентируемое подмногообразие $N \subset \mathbb{R}^8$ имеет почти комплексную структуру (одноместное векторное произведение), определенную формулой $J(X) = P(n_1,n_2,X)$.

2. Почти комплексная структура Кэли

Возьмем разложение $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ на две ортогональных плоскости $\mathbb{C}\mathrm{a} = E^p \oplus E^q$, $p+q=8$, причем так, что первая плоскость E^p содержит вещественную ось пространства $\mathbb{C}\mathrm{a}$. В каждой плоскости E^p и E^q рассмотрим единичную сферу S^{p-1} и S^{q-1}. Их произведение $S^{p-1}\times S^{q-1}$ является шестимерным ориентируемым подмногообразием в $\mathbb{R}^8$ и поэтому имеет почти комплексную структуру, определенную формулой $J(X) = P(n_1,n_2,X)$, где $n_1(x) = x \in S^{p-1}$ и $n_2(y) = y \in S^{q-1}$ – нормальные векторы сфер, а X – касательный вектор к произведению сфер. Поскольку второй вектор n_2 – чисто мнимый и все векторы n_1, n_2 и X взаимно ортогональны, то по формуле (6) получаем следующую формулу для почти комплексной структуры на произведении сфер:

$$J(X) = P(n_1,n_2,X) = (n_1n_2)X, \quad X \in T_{(n_1,n_2)}S^{p-1}\times S^{q-1}. \tag{9}$$

Формула $J(X) = (n_1n_2)X$ определяет комплексную структуру во всем пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$. Действительно, для чисто мнимого единичного вектора $n = n_1n_2$ и любого $X \in \mathbb{C}\mathrm{a}$ имеем: $J^2(X) = n(nX) = (nn)X = -X$. Легко видеть, что

$$J(n_1) = n_2, \quad J(n_2) = -n_1.$$

Поскольку n_1 и n_2 являются ортогональными и n_2 – чисто мнимый, то

$$P(n_1,n_2,X) = (n_1n_2)X + \langle n_2, X\rangle n_1 - \langle n_1, X\rangle n_2.$$

Поэтому получаем следующее выражение для оператора почти комплексной структуры на пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$:

$$J(X) = P(n_1,n_2,X) - \langle n_2, X\rangle n_1 + \langle n_1, X\rangle n_2, \quad X \in \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\langle J(X), n_1\rangle = -\langle X, n_2\rangle \quad \text{и} \quad \langle J(X), n_2\rangle = \langle X, n_1\rangle.$$

Оператор J комплексной структуры на $\mathbb{C}\mathrm{a}$ зависит от векторов $(n_1, n_2) \in \in S^{p-1} \times S^{q-1}$. Легко видеть, что его можно продолжить на открытое всюду плотное множество $E^{p,q}$ в $\mathbb{C}\mathrm{a}$, являющееся произведением плоскостей E^p и E^q с выкинутыми нулями:

$$E^{p,q} = (E^p \setminus \{0\}) \times (E^q \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{11}$$

Элементы пространства $E^{p,q}$ будем записывать в виде $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 \in E^p$ и $x_2 \in E^q$. Для каждой точки $x \in E^{p,q}$ определены два ортогональных единичных вектора

$$n_1(x) = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \qquad n_2(x) = \frac{x_2}{\|x_2\|}.$$

Тогда оператор J_x почти комплексной структуры на восьмимерном многообразии $E^{p,q}$ в точке $x = (x_1, x_2)$ определим по той же формуле

$$J_x(X) = (n_1(x)n_2(x))X, \quad X \in T_xE^{p,q} = \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{12}$$

Определение 1. Почти комплексную структуру J на $E^{p,q} = (E^p \setminus \{0\}) \times \times (E^q \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}\mathrm{a}$, определенную формулой (12), будем называть почти комплексной структурой Кэли.

Найдем выражение тензора Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX, JY] - [X,Y] - - J[X, JY] - J[JX, Y])$ структуры Кэли на $E^{p,q}$. Для вычисления $N(X,Y)$ нам потребуется производная $D_X(J)$ тензорного поля J в направлении вектора X: $D_X(J)(Y) = D_X((n_1n_2)Y) - (n_1n_2)(D_XY)$. Поскольку пространство $E^{p,q}$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^8$, то можно отождествить векторы X, Y с параллельными векторными полями на $E^{p,q}$ и тогда $D_X(J)(Y) = D_X(n_1n_2)Y$. Производная единичных векторов n_1 и n_2 в направлении вектора $X = (X_1, X_2)$ в точке $x = (x_1, x_2)$ находится простым дифференцированием единичных векторных полей n_1 и n_2

$$dn_1(X) = \frac{1}{\|x_1\|}\left(X_1 - \langle X, n_1\rangle n_1\right), \quad dn_2(X) = \frac{1}{\|x_2\|}\left(X_2 - \langle X, n_2\rangle n_2\right),$$

Поэтому из формулы $D_X(J)(Y) = D_X(n_1n_2)Y = (dn_1(X)n_2 + n_1dn_2(X))Y$ получаем следующее выражение для производной почти комплексной структуры Кэли на $E^{p,q}$:

$$D_X(J)(Y) = \frac{1}{\|x_1\|}(X_1n_2)Y + \frac{1}{\|x_2\|}(n_1X_2)Y - \left(\frac{1}{\|x_1\|}\langle X, n_1\rangle + \frac{1}{\|x_2\|}\langle X, n_2\rangle\right)(n_1n_2)Y.$$

В частности, в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ мы имеем: $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, поэтому

$$D_X(J)Y = (X_1n_2)Y + (n_1X_2)Y - (\langle X, n_1\rangle + \langle X, n_2\rangle)(n_1n_2)Y.$$

Для векторов X, Y, ортогональных $S^{p-1} \times S^{q-1}$ получаем:

$$D_X(J)(Y) = (X_1n_2)Y + (n_1X_2)Y. \tag{13}$$

Напомним, что нижний индекс у векторов X_1 и X_2 обозначает компоненты вектора X, соответствующие разложению (11) пространства $E^{p,q}$ в прямое произведение.

Вычислим теперь все слагаемые тензора Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y])$ структуры Кэли на $E^{p,q}$ в точках произведения сфер и для векторов X, Y, ортогональных произведению сфер. Поскольку X, Y – параллельные векторные поля, то $[X,Y] = 0$. Для остальных слагаемых имеем:

$$[JX,JY] = D_{JX}(JY) - D_{JY}(JX)) = D_{JX}(J)Y - D_{JY}(J)X = \\ = ((JX)_1 n_2)Y + (n_1(JX)_2)Y - ((JY)_1 n_2)X + (n_1(JY)_2)X,$$

$$J[X,JY] = J(D_X(JY) - D_{JY}X) = J(D_X(J)Y) = J((X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y),$$
$$J[JX,Y] = J(D_{JX}Y - D_Y(JX)) = -J(D_Y(J)X) = -J((Y_1 n_2)X + (n_1 Y_2)X).$$

Получаем следующее выражение тензора Нейенхейса в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ для векторов X, Y, ортогональных произведению сфер:

$$N(X,Y) = 2\big\{(((JX)_1 n_2 + n_1(JX)_2)Y - ((JY)_1 n_2 + n_1(JY)_2)X - \\ - J((X_1 n_2)Y - (Y_1 n_2)X + (n_1 X_2)Y - (n_1 Y_2)X)\big\}. \quad (14)$$

Из полученной формулы сразу следует, что почти комплексная структура J на $E^{p,q}$ является неинтегрируемой.

Вычислим также $\langle D_X(J)Y, Z\rangle$ в точках произведения сфер и для векторов X, Y, Z, ортогональных произведению сфер через векторное произведение. Если в формуле трехместного векторного произведения P второй вектор y – чисто мнимый, то $P(x,y,z) = (xy)z + \langle x,y\rangle z + \langle y,z\rangle x - \langle z,x\rangle y$. Поэтому $(xy)z = P(x,y,z) - \langle x,y\rangle z - \langle y,z\rangle x + \langle z,x\rangle y$. Тогда для $D_X(J)Y = (X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y$ имеем:

$$(X_1 n_2)Y = P(X_1, n_2, Y) + \langle Y, X_1\rangle n_2, \quad (n_1 X_2)Y = P(n_1, X_2, Y) - \langle X_2, Y\rangle n_1.$$

Поэтому

$$D_X(J)Y = P(X_1, n_2, Y) + P(n_1, X_2, Y) + \langle Y, X_1\rangle n_2 - \langle X_2, Y\rangle n_1.$$

Если Z – любой вектор, ортогональный произведению сфер в точке x, то

$$\langle D_X(J)Y, Z\rangle = \Phi(X_1, n_2, Y, Z) + \Phi(n_1, X_2, Y, Z). \quad (15)$$

Теорема 2. *Почти комплексная структура Кэли J на $E^{p,q}$ является ортогональной и неинтегрируемой. Ее фундаментальная форма $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ имеет вид:*

$$\omega_x(X,Y) = \Phi(n_1, n_2, X, Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X,Y), \quad (16)$$

где символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные относительно скалярного произведения к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$.

Доказательство. Ортогональность J следует из свойства $\langle nX, nY\rangle = \langle n,n\rangle\langle X,Y\rangle = \langle X,Y\rangle$, когда $n = n_1 n_2$. Поскольку открытое множество $E^{p,q}$ имеет единые координаты из $\mathbb{R}^8$, то тензор Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y])$ может быть вычислен непосредственно по формуле $N^i_{jk} = 2(J^h_j \partial_h J^i_k - J^h_k \partial_h J^i_j - J^i_h \partial_j J^h_k + J^i_h \partial_k J^h_j)$. Для того чтобы воспользоваться этой формулой, достаточно оператор умножения $J_x(X) = \dfrac{x_1 x_2}{\|x_1\|\|x_2\|}X$ записать в виде матрицы, действующей на столбец координат вектора X, и провести явное вычисление компонент N^i_{jk}. Легко видеть, что квадраты компонент N^i_{jk} тензора Нейенхейса являются рациональными функциями координат точки x. Поэтому для доказательства неинтегрируемости J достаточно показать, что хотя бы в одной точке значение тензора $N_x(X,Y) \neq 0$. Тогда $N \neq 0$ почти всюду на $E^{p,q}$. Можно использовать формулу (14) для нахождения тензора Нейенхейса в точках произведения сфер и для векторов X, Y, ортогональных произведению сфер. Пусть, например: $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда $N_{(n_1,n_2)}(e_1,e_2) = 4e_3 - 4e_6 \neq 0$.

Фундаментальная 2-форма почти комплексной структуры J на $E^{p,q}$ находится достаточно просто из формулы (10) для J:

$$\omega_x(X,Y) = \langle JX, Y\rangle = \langle P(n_1,n_2,X) - \langle n_2, X\rangle n_1 + \langle n_1, X\rangle n_2, Y\rangle = \\ = \Phi(n_1,n_2,X,Y) + \langle n_1,X\rangle\langle n_2,Y\rangle - \langle n_1,Y\rangle\langle n_2,X\rangle = \\ = \Phi(n_1,n_2,X,Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X,Y).$$

где $\Phi(x,y,z,w) = \langle P(x,y,z), w\rangle$ – введенная ранее кососимметрическая 4-форма на алгебре $\mathbb{C}$a, а символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$ относительно скалярного произведения. □

3. Шестимерные произведения сфер в $\mathbb{C}a = \mathbb{R}^8$

Почти комплексная структура Кэли на открытом множестве $E^{p,q} \subset \mathbb{R}^8$ при ограничении на подмногообразие $S^{p-1} \times S^{q-1}$ определяет на нем почти комплексную структуру, которую также будем называть именем Кэли. Точку $x \in S^{p-1} \times S^{q-1}$ естественно представить в виде двух компонент: $x = (n_1, n_2)$, где $n_1 \in S^{p-1}$ и $n_2 \in S^{q-1}$ отождествляются также с нормальными векторами сфер. Тогда для вектора $X \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ имеем $J_x(X) = P(n_1,n_2,X) = (n_1 n_2)X$.

Теорема 3. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является неинтегрируемой. Фундаментальная 2-форма на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ и ее внешний дифференциал имеют соответственно вид:*

$$\omega_x(X,Y) = \Phi(n_1,n_2,X,Y), \tag{17}$$

$$d\omega(X,Y,Z) = \Phi(X_1,n_2,Y,Z) + \Phi(Y_1,n_2,Z,X) + \Phi(Z_1,n_2,X,Y) + \\ + \Phi(n_1,X_2,Y,Z) + \Phi(n_1,Y_2,Z,X) + \Phi(n_1,Z_2,X,Y), \tag{18}$$

где $n_1 \in S^{p-1}$, $n_2 \in S^{q-1}$, а нижние индексы 1 и 2 у векторов $X,Y,Z \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ обозначают компоненты этих векторов, касательные к S^{p-1} и S^{q-1} соответственно.

Для ковариантной производной $\nabla_X J$ на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ имеет место следующее выражение

$$\langle \nabla_X(J)Y, Z\rangle = \Phi(X_1,n_2,Y,Z) + \Phi(n_1,X_2,Y,Z).$$

Почти комплексная структура Кэли J на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является покомпонентно приблизительно кэлеровой, то есть имеют место следующие равенства:

$$\nabla_{X_1}(J)X_1 = 0, \quad \nabla_{X_2}(J)X_2 = 0,$$

для любых векторов, касательных только к одному из сомножителей в произведении $S^{p-1} \times S^{q-1}$, то есть векторов вида $X = (X_1, 0)$ и $X = (0, X_2)$.

Доказательство. Поскольку $S^{p-1}\times S^{q-1}$ (почти) голоморфно вкладывается в пространство $E^{p,q}$, то выражения тензора Нейенхейса, фундаментальной формы и ковариантной производной тензора J получаются из общих выражений, полученных для пространства $E^{p,q}$, считая, что все векторы X, Y, Z ортогональны нормальным векторам n_1 и n_2. Таким образом, на $S^{p-1}\times S^{q-1}$ тензор Нейенхейса имеет выражение (14), из которого следует неинтегрируемость J.

Для фундаментальной 2-формы, учитывая, что X, Y ортогональны n_1 и n_2, имеем:

$$\omega_x(X,Y)=\langle JX,Y\rangle=\langle P(n_1,n_2,X)-\langle n_2,X\rangle n_1+\langle n_1,X\rangle n_2,Y\rangle= \\ =\langle P(n_1,n_2,X),Y\rangle=\Phi(n_1,n_2,X,Y).$$

Найдем внешний дифференциал формы ω по формуле

$$d\omega(X,Y,Z)=X\omega(Y,Z)+Y\omega(Z,X)+Z\omega(X,Y)- \\ -\omega([X,Y],Z)-\omega([Y,Z],X)-\omega([Z,X],Y).$$

Векторы $X,Y,Z\in T_x(S^{p-1}\times S^{q-1})$ удобно считать продолженными на $E^{p,q}$ как параллельные векторные поля, тогда их скобки Ли будут нулевыми. Поскольку вектор $X=(X_1,X_2)$ ортогонален к n_1 и n_2, то $dn_1(X)=X_1$ и $dn_2(X)=X_2$, Поэтому

$$X\omega(Y,Z)=X\Phi(n_1,n_2,Y,Z)=\Phi(X_1,n_2,Y,Z)+\Phi(n_1,X_2,Y,Z).$$

Остальные компоненты вычисляются аналогично. Складывая их, получаем $d\omega$.

Формула для ковариантной производной $\nabla_X J$ установлена ранее как формула (15). Из (15) и кососимметричности Φ легко получается, что $\nabla_{X_1}(J)X_1=0$, $\nabla_{X_2}(J)X_2=0$ для векторов вида $X=(X_1,0)=X_1$ и $X=(0,X_2)=X_2$. Это свойство естественно назвать покомпонентной приблизительно кэлеровостью, то есть приблизительно кэлеровостью отдельно по направлениям, касательным к S^{p-1} и отдельно к S^{q-1}. Для общего вектора X это свойство не выполняется, что легко проверяется прямыми вычислениями. Теорема доказана. □

3.1. Почти комплексные структуры 3-форм. Поскольку все рассматриваемые нами шестимерные произведения сфер не являются симплектическими многообразиями, то фундаментальные формы ω почти комплексных структур Кэли не являются замкнутыми, $d\omega\neq 0$. Н. Хитчин в работе [13] показал, что в шестимерном случае для 3-формы имеет смысл понятие невырожденности и каждая 3-форма определяет оператор, который может быть почти комплексной структурой. Естественно рассмотреть вопрос о невырожденности 3-формы $d\omega$ фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на произведении сфер и вопрос том, определяет ли $d\omega$ новую почти комплексную структуру на $S^{p-1}\times S^{q-1}$. Сначала напомним основные построения Хитчина.

Пусть V – 6-мерное вещественное векторное пространство, μ – форма объема на V и Λ^3V^* – 20-мерное линейное пространство кососимметрических полилинейных 3-форм на V. Для формы $\Omega\in\Lambda^3V^*$ и вектора $v\in V$ возьмем внутреннее произведение $\iota_v\Omega\in\Lambda^2V^*$. Тогда $\iota_v\Omega\wedge\Omega\in\Lambda^5V^*$. Естественное спаривание внешним произведением $V^*\otimes\Lambda^5V^*\to\Lambda^6V^*\equiv\mathbb{R}\mu$ определяет изоморфизм $A:\Lambda^5V^*\cong V$, и, используя это, мы определяем линейное преобразование $K_\Omega:V\to V$ как

$$K_\Omega(v)=A(\iota_v\Omega\wedge\Omega). \tag{19}$$

Другими словами, $\iota_{K_\Omega(v)}\mu = \iota_v\Omega \wedge \Omega$. Определим $\lambda(\Omega) \in \mathbb{R}$ как

$$\lambda(\Omega) = \frac{1}{6}\operatorname{tr} K_\Omega^2.$$

Определение 2. Форму Ω будем называть невырожденной, если $\lambda(\Omega) \neq 0$.

В работе [13] показано, что линейное преобразование K_Ω обладает следующими свойствами: $\operatorname{tr} K_\Omega = 0$ и $K_\Omega^2 = \lambda(\Omega)Id$.

Теорема 4 [13]. *Предположим, что* $\lambda(\Omega) \neq 0$ *для* $\Omega \in \Lambda^3 V^*$. *Тогда*
- $\lambda(\Omega) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\Omega = \alpha + \beta$, *где* α, β *– вещественные разложимые* 3*-формы и* $\alpha \wedge \beta \neq 0$*;*
- $\lambda(\Omega) < 0$ *тогда и только тогда, когда* $\Omega = \alpha + \bar{\alpha}$ *где* $\alpha \in \Lambda^3(V^* \otimes \mathbb{C})$ *есть комплексная разложимая* 3*-форма и* $\alpha \wedge \bar{\alpha} \neq 0$.

Из этого предложения следует [13], что если $\lambda(\Omega) > 0$, то она лежит в $GL(V)$-орбите формы $\varphi = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 + \theta_4 \wedge \theta_5 \wedge \theta_6$ для базиса $\theta_1, \dots, \theta_6$ пространства V^*, а если $\lambda(\Omega) < 0$, то в орбите формы

$$\varphi = \alpha + \bar{\alpha}, \quad \alpha = (\theta_1 + i\theta_2) \wedge (\theta_3 + i\theta_4) \wedge (\theta_5 + i\theta_6).$$

В случае $\lambda(\Omega) < 0$ приведенная выше форма имеет вид: $\varphi = 2(\theta_{135} - \theta_{146} - \theta_{245} - \theta_{236})$, где $\theta_{ijk} = \theta_i \wedge \theta_j \wedge \theta_k$.

20-мерное вещественное векторное пространство $\Lambda^3 V^*$ содержит инвариантную квадратичную гиперповерхность $\lambda(\Omega) = 0$, которая делит $\Lambda^3 V^*$ на два открытых множества: $\lambda(\Omega) > 0$ и $\lambda(\Omega) < 0$. Компонента единицы стабилизатора 3-формы, лежащей в первом множестве, сопряжена группе $SL(3,\mathbb{R}) \times SL(3,\mathbb{R})$, а в другом случае – группе $SL(3,\mathbb{C})$.

В случае $\lambda(\Omega) < 0$ вещественная 3-форма Ω определяет комплексную 3-форму $\alpha \in \Lambda^3(V^* \otimes \mathbb{C})$ и структуру I_Ω комплексного векторного пространства на вещественном векторном пространстве V следующим образом. Поскольку $K_\Omega^2 = \lambda(\Omega)Id$, тогда если $\lambda(\Omega) < 0$, комплексная структура I_Ω на V определяется формулой

$$I_\Omega = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(\Omega)}} K_\Omega. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь различные случаи произведений сфер в пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$. Отметим, что, в отличие от S^6, на произведении сфер $S^1 \times S^{2m-1}$ существует комплексная структура, она была открыта Хопфом [14]. Калаби и Экман нашли комплексную структуру на произведении любых нечетномерных сфер (см. [7] и [8]). Как известно [9], на произведении четномерных сфер почти комплексная структура существует только в одном нетривиальном случае $S^2 \times S^4$. Мы рассмотрим почти комплексные структуры Кэли на S^6, $S^3 \times S^3$, $S^1 \times S^5$ и $S^2 \times S^4$.

3.2. Сфера S^6. Для шестимерной сферы S^6 возьмем разложение пространства $\mathbb{C}\mathrm{a}$ в произведение одномерного и семимерного подпространств: $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathrm{Re}(\mathbb{C}\mathrm{a}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^7$. Получаем $S^0 \times S^6 = \{-1, +1\} \times S^6$ – два экземпляра стандартной единичной сферы S^6 в пространстве $\mathbb{R}^7$ чисто мнимых чисел Кэли. Будем рассматривать один экземпляр $\{1\} \times S^6 = S^6 \subset \mathbb{R}^7$. Почти комплексная структура Кэли J на S^6 определяется следующим образом. Если $n = n(x)$ – единичный нормальный вектор в точке $x \in S^6$, тогда $J_x : T_x S^6 \to T_x S^6$ есть умножение на n слева: $J_x(X) = n \times X$. Очевидно, что структура J является ортогональной. Хорошо известно, что структура J неинтегрируема, то есть $N(X,Y) \neq 0$.

Пусть $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – фундаментальная 2-форма, соответствующая J. Она имеет очень простое выражение через векторное произведение:

$$\omega(X,Y) = \langle n\times X, Y\rangle = \langle n, X\times Y\rangle. \tag{21}$$

По классификации Грея – Харвеллы [15] почти эрмитовых многообразий, многообразие (S^6, J) принадлежит классу $W_1 = NK$ приблизительно кэлеровых многообразий (nearly Kähler). Напомним, что это такие многообразия, что $\nabla_X(J)X = 0$, или $3\nabla\omega = d\omega$. В работе [15] установлены следующие свойства приблизительно кэлеровых многообразий:

$$\delta\omega = 0, \quad |\nabla\omega|^2 = \frac{1}{9}|d\omega|^2 = \frac{1}{16}|N|^2 = s - s^*,$$

где ω – фундаментальная форма, N – тензор Нейенхейса и s, s^* – скалярные кривизны.

Выразим основные характеристики почти комплексной структуры J на сфере S^6 через векторное произведение (подробные вычисления см. в [11]).

Лемма 1. *Калибровка φ при ее ограничении на сферу обладает свойством:*

$$\varphi(JX, Y, Z) = \varphi(X, JY, Z) = \varphi(X, Y, JZ).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\varphi(Z, JX, Y) &= \langle Z, JX\times Y\rangle = \langle Z, -n\times(X\times Y) - (X,Y)n\rangle = \\ &= \langle Z, -n\times(X\times Y)\rangle = -\langle Z\times n, X\times Y\rangle = \\ &= \langle n\times Z, X\times Y\rangle = \langle JZ, X\times Y\rangle = \varphi(JZ, X, Y).\end{aligned}$$

□

Лемма 2. *Пусть φ и ψ – ассоциативная и коассоциативная калибровки пространства $\mathbb{R}^7$. Тогда для любых X, Y, Z, касательных к сфере S^6 имеет место равенство*

$$i_n\psi(X,Y,Z) = -\varphi(JX,Y,Z),$$

где i_n – внутреннее произведение с вектором нормали $n(x)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}i_n\psi(X,Y,Z) &= \langle n, [XYZ]\rangle = \langle n, -X\times(Y\times Z)\rangle = \\ &= -\langle n\times X, Y\times Z\rangle = -\varphi(JX,Y,Z).\end{aligned}$$

□

Пусть $*_S$ – оператор Ходжа на сфере и $\theta|_S$ – ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbb{R}^7$ на подмногообразие S^6.

Теорема 5 [11]. *Фундаментальная форма ω почти комплексной структуры Кэли J на S^6 и ее внешний дифференциал $d\omega$ обладают свойствами:*

$$\omega = i_n\varphi, \quad d\omega = 3\varphi|_S, \tag{22}$$

$$*_S\ \omega = \psi|_S, \quad *_S\ d\omega = -3\ i_n\psi,$$

$$d\omega(X,Y,Z) = 3\ i_n\psi(JX,Y,Z),$$

$$d\omega(JX,Y,Z) = d\omega(X,JY,Z) = d\omega(X,Y,JZ),$$

$$d\omega(X,JY,JZ) = -d\omega(X,Y,Z).$$

Найдем ковариантную производную тензора J. Поскольку $n(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_xS^6$ имеем: $Dn_x(X) = X$. Тогда из равенства $(\nabla_X J)Y = \mathrm{pr}\,(D_X(JY)) = \mathrm{pr}\,(D_X(n \times Y)) = \mathrm{pr}\,(X \times Y)$, где pr – проекция на касательное пространство T_xS^6, получаем:

$$(\nabla_X J)Y = X \times Y - \langle n(x), X \times Y\rangle n = X \times Y - \omega(X,Y)n.$$

Теорема 6. *Тензор Нейенхейса $N(X,Y)$ почти комплексной структуры J имеет вид*

$$N(X,Y) = -8\,n \times (X \times Y).$$

Доказательство. Требуемое утверждение сразу следует из формулы (14). Можно также использовать формулу $g(N(X,Y), JZ) = 4g((\nabla_Z J)X, Y) + 2d\omega(Z, JX, JY) - 2d\omega(Z, X, Y)$, установленную в книге [7] (с учетом разницы в определении внешнего произведения и фундаментальной формы), последнего равенства теоремы (5) и формулы для $(\nabla_X J)Y$. □

Теорема 7 [11]. *Фундаментальная 2-форма ω почти комплексной структуры Кэли является собственной для оператора Лапласа:*

$$\Delta\omega = 12\,\omega.$$

3.2.1. Почти комплексная структура, соответствующая 3-форме $d\omega$. Для фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на S^6 3-форма $\Omega = d\omega$ имеет вид $\Omega = 3\varphi|_{S^6}$, где $\varphi = \omega_{123} - \omega_{167} + \omega_{257} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246} + \omega_{347}$ – ассоциативная калибровка пространства $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\,(\mathbb{C}\mathrm{a})$ (напомним, что $\omega_{pqr} = dx_p \wedge dx_q \wedge dx_r$).

Найдем оператор K_Ω для каждой точки сферы. Рассмотрим сначала точку $e_7 \in S^6$. Касательное пространство имеет ортонормированный базис векторов $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,\ e_6$ и форму объема $\mu = \omega_{123456}$. Ограничение формы $\Omega = d\omega$ на $T_{e_7}S^6$ имеет вид:

$$\Omega_{e_7} = 3(\omega_{123} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246}).$$

В силу инвариантности формы Ω_{e_7} относительно подгруппы изотропии $SU(3) \subset G_2$, действующей на $T_{e_7}S^6$, достаточно вычислить значение K_Ω на одном векторе, например, $K_\Omega(e_1)$:

$$\iota_{e_1}\Omega_{e_7} = 3\iota_{e_1}(\omega_{123} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246}) = 3(\omega_{23} + \omega_{45}).$$

$$\iota_{e_1}\Omega_{e_7} \wedge \Omega_{e_7} = 18\omega_{12345} = -18\iota_{e_6}\omega_{123456}.$$

Поэтому $K_\Omega(e_1) = -18e_6 = 18e_7 \times e_1 = 18J(e_1)$. Отсюда следует, что $I_{\Omega_{e_7}} = J_{e_7}$. Из инвариантности почти комплексной структуры Кэли J и формы Ω относительно группы G_2, действующей транзитивно на S^6, мы получаем, что равенство $I_{\Omega_{e_7}} = J_{e_7}$ имеет место не только в точке e_7, но и в любой другой точке сферы.

Вывод. *3-форма $\Omega = d\omega$ на S^6 невырождена всюду и определяет почти комплексную структуру I_Ω на S^6, совпадающую с почти комплексной структурой Кэли J.*

3.3. Произведение сфер $S^3 \times S^3$. Рассмотрим произведение двух нечетномерных сфер S^3 и S^3, вложенное в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^3 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$, а вторая сфера S^3 – единичной в другой координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида $y = x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7$.

Считая число e_1 комплексной мнимой единицей ($e_1 = i$), отождествим первое пространство $\mathbb{R}^4$ чисел $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$ с комплексными матрицами следующим образом:

$$x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 = (x^0 + x^1i) + (x^2 + x^3i)e_2 = z^1 + z^2e_2 \equiv \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = U_x.$$

При этом произведение xy чисел Кэли переходит в произведение матриц U_xU_y. Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство в единице T_1S^3 имеет базис из векторов e_1, e_2, e_3. При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$ данному базису соответствует базис в касательном пространстве $T_eSU(2)$ в единице e, состоящий из матриц:

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующие правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид:

$$V_1(x) = dR_x(E_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz^1 & iz^2 \\ i\overline{z^2} & -i\overline{z^1} \end{pmatrix} = (-x^1, x^0, -x^3, x^2),$$

$$V_2(x) = dR_x(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{z^2} & \overline{z^1} \\ -z^1 & -z^2 \end{pmatrix} = (-x^2, x^3, x^0, -x^1),$$

$$V_3(x) = dR_x(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\overline{z^2} & i\overline{z^1} \\ iz^1 & iz^2 \end{pmatrix} = (-x^3, -x^2, x^1, x^0).$$

Легко видеть, что данные правоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа (как чисел Кэли) на элемент $x \in S^3$. Действительно,

$$e_1x = e_1(x^0+x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3) = -x^1+x^0e_1-x^3e_2+x^2e_3 = (-x^1, x^0, -x^3, x^2) = V_1(x),$$

$$e_2x = e_2(x^0+x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3) = -x^2+x^3e_1+x^0e_2-x^1e_3 = (-x^2, x^3, x^0, -x^1) = V_2(x),$$

$$e_3x = e_3(x^0+x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3) = -x^3-x^2e_1x^1e_2+x^0e_3 = (-x^3, -x^2, x^1, x^0) = V_3(x).$$

Аналогичным образом отождествим второе пространство $\mathbb{R}^4$ чисел $y = x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7 = (x^4 + x^5e_1 + x^6e_2 + x^7e_3)e_4$ с комплексными матрицами следующим образом:

$$y = (x^4, x^5, x^6, x^7) = (x^4 + x^5i, x^6 + x^7i) = (w^1, w^2) = \begin{pmatrix} w^1 & -\overline{w^2} \\ w^2 & \overline{w^1} \end{pmatrix} = U_y.$$

Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство $T_{e_4}S^3$ в точке e_4 имеет базис из векторов e_5, e_6, e_7. При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$ данному базису соответствует базис в касательном пространстве $T_eSU(2)$, состоящий из матриц $F_1 = E_1, F_2 = -E_2, F_3 = E_3$. Тогда соответствующие им правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид:

$$W_1(y) = (-x^5, x^4, x^7, -x^6),$$

$$W_2(y) = (-x^6, -x^7, x^4, x^5),$$

$$W_3(y) = (-x^7, x^6, -x^5, x^4).$$

Данные правоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа на элемент $y \in S^3$. Действительно,

$$e_1 y = e_1(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) =$$
$$= x^4 e_5 - x^5 e_4 - x^6 e_7 + x^7 e_6 = (-x^5, x^4, x^7, -x^6) = W_1(y),$$

$$e_2 y = e_2(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) =$$
$$= x^4 e_6 + x^5 e_7 - x^6 e_4 - x^7 e_5 = (-x^6, -x^7, x^4, x^5) = W_1(y),$$

$$e_3 y = e_3(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) =$$
$$= x^4 e_7 - x^5 e_6 + x^6 e_5 - x^7 e_4 = (-x^7, x^6, -x^5, x^4) = W_1(y).$$

Теорема 8. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. При естественном отождествлении произведения сфер $S^3 \times S^3$ с группой Ли $SU(2) \times SU(2)$ почти комплексная структура Кэли J является правоинвариантной. При этом для базисных правоинвариантных векторных полей V_i и W_j на группах-сомножителях имеют место равенства: $JW_1 = V_1$, $JW_2 = V_2$, $JW_3 = V_3$.*

Доказательство. Для установления правоинвариантности структуры Кэли J достаточно показать, что оператор почти комплексной структуры J переводит правоинвариантные векторные поля $W_i(y)$ в правоинвариантные векторные поля $V_i(x)$. Пусть $(x, y) \in S^3 \times S^3$. Как уже отмечалось, $n_1(x) = x$ и $n_2(y) = y$. В дальнейших вычислениях будем использовать следующие свойства:

- $n_1 n_2 \perp e_i$, $n_1 \perp n_2$, $n_2 \perp e_i$, $n_1 \perp n_2 \times e_i$ $n_2 \perp n_2 \times e_i$ для $i = 1, 2, 3$;
- $uv = U \times V - \langle U, V\rangle$ для чисто мнимых октав u и v;
- $n \times (n \times Z) = -Z + \langle n, Z\rangle n$, если n – вектор единичной длины;
- $(X \times Y) \times Z = -X \times (Y \times Z) + 2\langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z - \langle Y, Z\rangle X$;
- $\langle xy, zy\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, y\rangle$.

Учитывая разложение $n_1 = n_1^0 + N_1$ на вещественную и чисто мнимую части, имеем для $i = 1, 2, 3$:

$$J(W_i(y)) = J(e_i y) = (n_1 n_2)(e_i n_2) = -\langle n_1 n_2, e_i n_2\rangle + (n_1 n_2) \times (e_i n_2) =$$
$$= -\langle n_1, e_i\rangle + ((n_1^0 + N_1) n_2) \times (e_i \times n_2) =$$
$$= -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 (n_2 \times (e_i \times n_2) + (N_1 \times n_2) \times (e_i \times n_2) =$$
$$= -\langle n_1, e_i\rangle - n_1^0 (n_2 \times (n_2 \times e_i) - (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) =$$
$$= -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i - (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) =$$
$$- \langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times (n_2 \times (n_2 \times e_i)) - 2\langle N_1, n_2 \times e_i\rangle n_2 +$$
$$+ \langle N_1, n_2\rangle (n_2 \times e_i) + \langle n_2, n_2 \times e_i\rangle N_1 =$$
$$= -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times (n_2 \times (n_2 \times e_i)) = n_1^0 e_i - N_1 \times e_i - \langle n_1, e_i\rangle =$$
$$= n_1^0 e_i - N_1 \times e_i - \langle N_1, e_i\rangle =$$
$$= n_1^0 e_i + e_i \times N_1 - \langle e_i, N_1\rangle = e_i(n_1^0 + N_1) = e_i n_1 = e_i x = V_i(x).$$

Очевидно, что почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. Тензор Нейенхейса легко вычисляется для базисных правоинвариантных полей V_i и W_j, $i, j = 1, 2, 3$, с учетом того, что $[V_i, W_j] = 0$. □

3.3.1. Почти комплексная структура, соответствующая 3-форме $d\omega$. Найдем выражение фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на $S^3 \times S^3$, вычислим $d\omega$ и исследуем последнюю форму на невырожденность. В силу ее правоинвариантности все вычисления можно провести в касательном пространстве $T_{(1,e_4)}(S^3 \times S^3) = T_{(e,e)}(SU(2) \times SU(2))$. Это пространство имеет ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3\}$. Скобки Ли соответствующих правоинвариантных векторных полей имеют следующий вид:

$$[E_1, E_2] = -2E_3, \quad [E_1, E_3] = 2E_2, \quad [E_2, E_3] = -2E_1,$$

$$[F_1, F_2] = 2F_3, \quad [F_1, F_3] = -2F_2, \quad [F_2, F_3] = 2F_1.$$

Поскольку $J(E_k) = -F_k$, $k = 1, 2, 3$, то фундаментальная форма $\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$ легко вычисляется: $\omega(E_k, F_k) = -1$, $k = 1, 2, 3$. Пусть e^1, e^2, e^3, f^1, f^2, f^3 – дуальный базис. Тогда форма ω имеет вид:

$$\omega = -e^1 \wedge f^1 - e^2 \wedge f^2 - e^3 \wedge f^3.$$

Для вычисления внешнего дифференциала $d\omega$ используем формулы Маурера–Картана $d\theta^k = -\sum\limits_{i<j} C^k_{ij}\theta^i \wedge \theta^j$ со структурными константами для правоинвариантных векторных полей. В нашем случае имеем:

$$de^1 = 2e^2 \wedge e^3, \quad de^2 = -2e^1 \wedge e^3, \quad de^3 = 2e^1 \wedge e^3,$$

$$df^1 = -2f^2 \wedge f^3, \quad df^2 = 2f^1 \wedge f^3, \quad df^3 = -2f^1 \wedge f^3.$$

Поэтому 3-форма имеет вид:

$$\Omega = d\omega = -2e^{23} \wedge f^1 + 2e^{13} \wedge f^2 - 2e^{12} \wedge f^3 - 2e^1 \wedge f^{23} + 2e^2 \wedge f^{13} - 2e^3 \wedge f^{12},$$

где, как обычно, $e^{pq} = e^p \wedge e^q$ и $f^{pq} = f^p \wedge f^q$. Теперь вычисление $\iota_v\Omega \wedge \Omega$ не составляет труда. Например, для базисного векторного поля E_1 имеем:

$$\iota_{E_1}\Omega = 2e^3 \wedge f^2 - 2e^2 \wedge f^3 - 2f^{23}, \quad \iota_{E_1}\Omega \wedge \Omega = -8e^{123} \wedge f^{23} - 4e^{23} \wedge f^{123}.$$

Поскольку

$$\iota_{F_1}\mu = \iota_{F_1}e^{123} \wedge f^{123} = -e^{123} \wedge f^{23}, \quad \iota_{E_1}\mu = \iota_{E_1}e^{123} \wedge f^{123} = e^{23} \wedge f^{123},$$

то

$$\iota_{E_1}\Omega \wedge \Omega = \iota_{8F_1 - 4E_1}\mu.$$

Поэтому $K_\Omega(E_1) = 8F_1 - 4E_1$. Совершенно аналогично:

$$K_\Omega(E_2) = 8F_2 - 4E_2, \quad K_\Omega(E_3) = 8F_3 - 4E_3,$$

$$K_\Omega(F_1) = -8E_1 + 4F_1, \quad K_\Omega(F_2) = -8E_2 + 4F_2, \quad K_\Omega(F_3) = -8E_3 + 4F_3.$$

Легко вычисляется, что $K^2_\Omega = -48Id$. Мы получаем следующий

Вывод. *3-форма $\Omega = d\omega$ на $S^3 \times S^3 \equiv SU(2) \times SU(2)$ невырождена всюду и определяет следующую почти комплексную структуру I_Ω на $S^3 \times S^3$:*

$$I_\Omega(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2X_2 - X_1, -2X_1 + X_2), \tag{23}$$

где X_1 и X_2 – компоненты касательного вектора $X \in T(S^3 \times S^3)$.

Замечание 1. Данная почти комплексная структура I_Ω получена в работе [16] как каноническая почти комплексная структура на 3-симметрическом пространстве $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)/\Delta SU(2)$. В [16] показано, что вместе с формой ω она является единственной инвариантной приблизительно кэлеровой структурой на $S^3 \times S^3$.

3.4. Произведение сфер $S^1 \times S^5$. Пусть сфера S^1 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^4 e_4$, а S^5 – единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^6$, состоящей из чисел вида $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7$. Пусть $n_1(x) = x \in S^1$ и $n_2(x) = x \in S^5$.

Поскольку $S^1 \times S^5$ есть шестимерное подмногообразие в $\mathbb{R}^8$, то оно имеет почти комплексную структуру, определенную формулой

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X, \quad X \in T_{(n_1,n_2)}(S^1 \times S^{2m-1}).$$

Вложение $S^1 \times S^5 \subset E^{2,6}$ является (почти) голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения для тензора Нейенхейса (14) и для фундаментальной 2-формы (18) с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2.

Отметим, что S^1 является группой относительно умножения чисел Кэли. Легко видеть, что $n_1 n_2 \in S^5$. Поэтому группа S^1 действует слева на S^5: $S^1 \times S^5 \to S^5$. Это действие удобно выразить при помощи комплексных чисел. Вектор $x = x^0 + x^4 e_4 \in \mathbb{R}^2$ удобно отождествить с комплексным числом $x = x^0 + x^4 i = z \in \mathbb{C}$, считая, что $e_4 = i$ – мнимая единица. Для векторов $y \in \mathbb{R}^6$ имеем:

$$\begin{aligned} y = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7 = \\ = (x^1 - x^5 e_4)e_1 + (x^2 - x^6 e_4)e_2 - (x^3 + x^7 e_4)e_3 = \\ = (x^1 - ix^5)e_1 + (x^2 - ix^6)e_2 + (x^3 - ix^7)e_3 = \\ = z^1 e_1 + z^2 e_2 + z^3 e_3 \equiv (z^1, z^2, z^3). \end{aligned}$$

Таким образом, можно отождествить $\mathbb{R}^6$ с $\mathbb{C}^3$. Тогда левое действие S^1 на S^5 – это просто умножение комплексного вектора $y \equiv (z^1, z^2, z^3) \in S^5 \subset \mathbb{C}^3$ на комплексное число $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$. При этом выполняются следующие свойства умножения:

$$z(z^k e_k) = (zz^k)e_k, \quad e_k z = \overline{z} e_k, \quad (ze_k)e_p = \overline{z}(e_k e_p), \quad k, p = 1, 2, 3, \quad k \neq p.$$

Очевидно, что левое действие S^1 на S^5 определяет расслоение Хопфа $S^5 \to \mathbb{C}P^2$. Отметим также, что элементы группы G_2 автоморфизмов чисел Кэли, оставляющие на месте вектор e_4, действуют на $\mathbb{C}^3$ как комплексно линейные преобразования. Известно, что они образуют группу $SU(3)$.

Теорема 9. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^1 \times S^5$ является неинтегрируемой. Оператор почти комплексной структуры Кэли J переводит векторное поле V_0, касательное к S^1, в векторное поле V_1 на S^5, касательное к слоям расслоения Хопфа: $J(V_0) = -V_1$.*

Доказательство. Находим тензор Нейенхейса прямым вычислением по формуле (14). Легко видеть, что для $n_1 = \cos\theta + \sin\theta e_4 = e^{i\theta}$, $n_2 = e_1$, $X = X_2 = e_2$, $Y = Y_2 = e_3$ имеет место соотношение $N_{(n_1,n_2)}(e_2, e_3) = -4(1 - e^{i2\theta}) \neq 0$. Поэтому структура J неинтегрируема.

Пусть $n_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \in S_1$ и $n_2 = z^1 e_1 + z^2 e_2 + z^3 e_3 \in S^5$. Тогда $n_1 n_2 = e^{i\theta} z^1 e_1 + e^{i\theta} z^2 e_2 + e^{i\theta} z^3 e_3 \in S^5$. Пусть $V_0(n_1) = ie^{i\theta} = in_1$ – касательное векторное поле к окружности S^1 и $V_1(n_2) = i(z^1, z^2, z^3)$ – касательное векторное поле к слоям расслоения Хопфа. Тогда

$$\begin{aligned} J(V_0(n_1)) = (n_1 n_2)ie^{i\theta} = (e^{i\theta} z^1 e_1, e^{i\theta} z^2 e_2, e^{i\theta} z^3 e_3)ie^{i\theta} = \\ = (z^1 e_1, z^2 e_2, z^3 e_3)ie^{i\theta} e^{-i\theta} = -i(z^1 e_1, z^2 e_2, z^3 e_3) = -i(z^1, z^2, z^3) = -V_1(n_2). \end{aligned}$$

□

По построению почти комплексная структура Кэли J инвариантна относительно таких элементов $g \in G_2$, которые действуют на $S^1 \times S^5$. Легко видеть, что подгруппа изотропии $SU(3) \subset G_2$ элемента e_4 действует транзитивно на S^5 и тождественно на S^1. Тогда почти комплексная структура Кэли J на $S^1 \times S^5$ инвариантна относительно действия $SU(3)$. Поэтому для описания почти комплексной структуры Кэли достаточно найти ее в точках вида (n_1, n_2), где n_1 пробегает S^1, а вектор $n_2 \in S^5$ фиксирован. Во всех остальных точках почти комплексная структура Кэли получается действием группы $SU(3)$.

Найдем почти комплексную структуру Кэли в точках вида (n_1, n_2), где $n_1 = \cos\theta + \sin\theta\, e_4 \in S^1$, $n_2 = e_1 \in S^5$. Имеем: $n_1 n_2 = \cos\theta\, e_1 - \sin\theta\, e_5$. Касательное пространство $T_{(n_1,e_1)}(S^1 \times S^5)$ имеет ортонормированный базис из векторов $V_0(n_1) = -\sin\theta + \cos\theta\, e_4$, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7. Действие почти комплексной структуры Кэли J на этих базисных векторах легко вычисляется:

$$J_{(n_1,e_1)} V_0(n_1) = e_5, \quad J_{(n_1,e_1)} e_5 = -V_0(n_1),$$

$$J_{(n_1,e_1)} e_2 = \cos\theta\ e_3 + \sin\theta\ e_7 = (\cos\theta\ - \sin\theta\ e_4) e_3 = e^{-i\theta} e_3,$$

$$J_{(n_1,e_1)} e_3 = -\cos\theta\ e_2 - \sin\theta\ e_6 = -(\cos\theta\ - \sin\theta\ e_4) e_2 = -e^{-i\theta} e_2,$$

$$J_{(n_1,e_1)} e_6 = -\cos\theta\ e_7 + \sin\theta\ e_3 = -(\cos\theta\ - \sin\theta\ e_4) e_7 = -e^{-i\theta} e_7,$$

$$J_{(n_1,e_1)} e_7 = \cos\theta\ e_6 - \sin\theta\ e_2 = (\cos\theta\ - \sin\theta\ e_4) e_6 = e^{-i\theta} e_6.$$

Отметим, что почти комплексная структура Кэли не инвариантна при левом действии S^1 на $S^1 \times S^5$. Действительно, пусть $x = \cos\varphi + \sin\varphi\, e_4 = e^{i\varphi} \in S^1$. Тогда

$$x(J_{(n_1,e_1)} e_2) = e^{i\varphi} e^{-i\theta} e_3 = e^{i(\varphi-\theta)} e_3.$$

С другой стороны, используя равенства

$$(z e_k) e_p = \overline{z}(e_k e_p), \quad e_k (z e_p) = (e_k \overline{z}) e_p, \quad e_k \overline{z} = z e_k,$$

получаем:

$$J_{(xn_1, xe_1)}(x e_2) = (e^{i\varphi} e^{i\theta} e^{i\varphi} e_1)(e^{i\varphi} e_2) = (e^{i(2\varphi+\theta)} e_1)(e^{i\varphi} e_2) = e^{-i(3\varphi+\theta)} e_3.$$

Нет инвариантности и при правом действии S^1 на $S^1 \times S^5$. Действительно,

$$(J_{(n_1,e_1)} e_2) x = e^{-i\theta} e_3 e^{i\varphi} = e^{-i(\theta+\varphi)} e_3.$$

С другой стороны,

$$J_{(n_1 x, e_1 x)}(e_2 x) = (e^{i\theta} e^{i\varphi} (e_1 e^{i\varphi}))(e_2 e^{i\varphi}) =$$
$$= (e^{i\theta} e^{i\varphi} e^{-i\varphi} e_1)(e_2 e^{i\varphi}) = (e^{i\theta} e_1)(e_2 e^{i\varphi}) = e^{-i(\theta-\varphi)} e_3.$$

3.4.1. Почти комплексная структура, соответствующая 3-форме $d\omega$. Найдем выражение внешнего дифференциала $d\omega$ фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на $S^1 \times S^5$ и исследуем $d\omega$ на невырожденность.

Поскольку почти комплексная структура Кэли J и форма ω на $S^1 \times S^5$ инвариантны относительно действия $SU(3)$ на S^5, то достаточно найти $\Omega = d\omega$ в точках вида (n_1, n_2), где n_1 пробегает S^1, а вектор $n_2 \in S^5$ фиксирован. Пусть для определенности $n_2 = e_1 \in S^5$ и пусть $n_1 = \cos\theta + \sin\theta\ e_4 \in S^1$.

Ортонормированный базис касательного пространства $T_{(n_1,e_1)}(S^1 \times S^5)$ образуют векторы $V_0(n_1) = -\sin\theta + e_4 \cos\theta$ и e_2, e_3, e_5, e_6, e_7. Для нахождения $\Omega = d\omega$

нужно найти значения $\Omega(e_i,e_j,e_k)$, $i<j<k\in\{2,3,5,6,7\}$ и значения $\Omega(V_0,e_i,e_j)$, $i<j\in\{2,3,5,6,7\}$. Будем использовать выражение (18) для $d\omega$ и формулу $\Phi = dx_0\wedge\varphi+\psi$, где φ и ψ – ассоциативная и коассоциативная калибровки $\mathbb{R}^7$.

Для $\Omega(e_i,e_j,e_k)$ формула (18) принимает вид:

$$\Omega(e_i,e_j,e_k)=3\Phi(n_1,e_i,e_j,e_k)=3\cos\theta\varphi(e_i,e_j,e_k)+3\sin\theta\psi(e_4,e_i,e_j,e_k).$$

Таким образом, $\Omega=3\cos\theta\varphi+3\sin\theta\iota_{e_4}\psi$. Используя формулы (2) и (5), получаем следующее выражение для Ω на $T_{e_1}S^5$:

$$\Omega_{S^5}=3\cos\theta(\omega_{257}-\omega_{356})+3\sin\theta(\omega_{567}-\omega_{235}). \tag{24}$$

Для $\Omega(V_0,e_i,e_j)$ формула (18) принимает вид:

$$\Omega(V_0,e_i,e_j)=\Phi(V_0,e_1,e_i,e_j)+2\Phi(n_1,V_0,e_i,e_j). \tag{25}$$

Первое слагаемое $\iota_{e_1}\iota_{V_0}\Phi$ в правой части (25) равно:

$$\Phi(V_0,e_1,e_i,e_j)=-\sin\theta\varphi(e_1,e_i,e_j)+\cos\theta\psi(e_4,e_1,e_i,e_j).$$

Таким образом, используя формулы (2) и (5), получаем в левой части (25): $\iota_{V_0}\Omega = -\sin\theta\iota_{e_1}\varphi+\cos\theta\iota_{e_1}\iota_{e_4}\psi=-\sin\theta(\omega_{23}-\omega_{67})-\cos\theta(\omega_{63}+\omega_{27})$. Следовательно,

$$\Omega_1=-v_0^*\wedge(\sin\theta(\omega_{23}-\omega_{67})+\cos\theta(\omega_{63}+\omega_{27})), \tag{26}$$

где v_0^* – первый вектор дуального базиса к $\{V_0,e_2,e_3,e_5,e_6,e_7\}$.

Второе слагаемое в правой части (25) $\iota_{V_0}\iota_{n_1}\Phi$ есть

$$2\Phi(n_1,V_0,e_i,e_j)=2\varphi(e_4,e_i,e_j).$$

Используя формулы (2) и (5), получаем: $\iota_{V_0}\Omega=2\iota_{e_4}\varphi=-\omega_{26}-\omega_{37}$. Следовательно,

$$\Omega_2=-2v_0^*\wedge(\omega_{26}+\omega_{37}). \tag{27}$$

Складывая формулы (24), (26), (27), получаем окончательно общее выражение для Ω:

$$\begin{aligned}\Omega=-v_0^*\wedge(\sin\theta\,\omega_{23}+2\omega_{26}+\cos\theta\,\omega_{27}-\cos\theta\,\omega_{36}+2\omega_{37}-\sin\theta\,\omega_{67})-\\ -3\sin\theta\,\omega_{235}+3\cos\theta\,\omega_{257}-3\cos\theta\,\omega_{356}+3\sin\theta\,\omega_{567}.\end{aligned} \tag{28}$$

Элемент объема на $T_{(n_1,e_1)}S^1\times S^5$ имеет вид: $\mu=v_0^*\wedge\omega_{23567}=\omega_{023567}$. Пусть

$$X=X^0V_0+X^2e_2+X^3e_3+X^5e_5+X^6e_6+X^7e_7\in T_{(n_1,e_1)}(S^1\times S^5).$$

Прямыми вычислениями получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned}\iota_X\Omega\wedge\Omega=-(6X^0+18X^5)\,\omega_{23567}+(12\cos\theta\,X^3-12\sin\theta\,X^7)\,\omega_{03567}+\\ +(12\cos\theta\,X^2-12\sin\theta\,X^6)\,\omega_{02567}--(10X^0+6X^5)\,\omega_{02367}+\\ +(12\sin\theta\,X^3+12\cos\theta\,X^7)\,\omega_{02357}+(12\sin\theta\,X^2+12\cos\theta\,X^6)\,\omega_{02356}.\end{aligned}$$

Поэтому оператор K_Ω имеет следующую матрицу:

$$K_\Omega=\begin{pmatrix}-6&0&0&-18&0&0\\0&0&-12\cos\theta&0&0&12\sin\theta\\0&12\cos\theta&0&0&-12\sin\theta&0\\10&0&0&6&0&0\\0&0&12\sin\theta&0&0&12\cos\theta\\0&-12\sin\theta&0&0&-12\cos\theta&0\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Простое вычисление показывает, что $K_\Omega^2 = -144Id$. Поэтому оператор K_Ω определяет почти комплексную структуру $I_\Omega = K_\Omega/12$. Легко видеть, что в точках $S^1 \times \{e_1\}$ имеет место соотношение $I_\Omega = AJ$ между почти комплексными структурами I_Ω и J, где связующая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & 0 & 0 & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ -1/2 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Поскольку почти комплексные структуры I_Ω и J инвариантны относительно действия на S^5 подгруппы изотропии $SU(3) \subset G_2$, то данное соотношение $I_\Omega = AJ$ имеет место во всех точках пространства $S^1 \times S^5$. Мы получили следующее утверждение.

Теорема 10. *3-форма $\Omega = d\omega$ на $S^1 \times S^5$ невырождена всюду и определяет почти комплексную структуру $I_\Omega = K_\Omega/12$ на $S^1 \times S^5$, которая в точках $(e^{i\theta}, n_2) \in S^1 \times S^5$ связана с почти комплексной структурой Кэли J формулой $I_\Omega = AJ$ с матрицей A вида* (30).

Замечание 2. Легко видеть, что почти комплексная структура I_Ω не является ортогональной и не является ассоциированной с фундаментальной формой ω: $\omega(I_\Omega X, I_\Omega Y) \neq \omega(X,Y)$. Рассмотрим расслоение Хопфа $S^1 \times S^5 \to \mathbb{C}P^2$, определенное левым действием S^1 на S^5. На горизонтальном распределении этого расслоения имеет место следующее соотношение: $I_\Omega = e^{2i\theta}J$, а на вертикальном распределении с базисными полями $\{V_0, V_1\}$ почти комплексная структура I_Ω действует следующим образом:

$$I_\Omega(V_0) = -\frac{1}{2}V_0 + \frac{5}{6}V_1, \quad I_\Omega(V_1) = -\frac{3}{2}V_0 + \frac{1}{2}V_1.$$

3.5. Произведение сфер $S^2 \times S^4$. Как известно [9], такое произведение четномерных сфер является единственным нетривиальным случаем, допускающим почти комплексную структуру. Вложим $S^2 \times S^4$ в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^2 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^3$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2$, а S^4 – единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^5$, состоящей из чисел вида $x = x^3e_3 + x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7$. Пусть n_1 и n_2 – нормальные векторы к сферам S^2 и S^4. Как шестимерное подмногообразие в $\mathbb{R}^8$, произведение $S^2 \times S^4$ имеет почти комплексную структуру, определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1n_2)X$, $X \in T_{(n_1,n_2)}(S^2 \times S^4)$. Поскольку касательный вектор X ортогонален к n_1 и n_2, то данное вложение $S^2 \times S^4 \subset E^{3,5}$ является (псевдо)голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения (17) и (14) для фундаментальной 2-формы и для тензора Нейенхейса с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2.

Прямая проверка показывает, что почти комплексная структура Кэли J на $S^2 \times S^4$ является неинтегрируемой. Действительно, пусть, например: $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда $N_{(n_1,n_2)}(e_1, e_2) = 4e_3 - 4e_6$.

Нахождение внешнего дифференциала $d\omega$ фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на $S^2 \times S^4$ и исследование $d\omega$ на невырожденность будет проведено в следующей работе.

Summary

N.K. Smolentsev. On Almost Complex Structures on 6-dimensional Products of Spheres.

In this article, almost complex structures on the sphere S^6 and on the products of spheres $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$, and $S^3 \times S^3$ which naturally arise at their embeddings in the algebra of Cayley numbers are considered. It is shown that all of them are nonintegrable. Expressions of the fundamental form ω and the Nijenhuis tensor for each case are obtained. It is also shown that the form $d\omega$ is nondegenerate. New special almost complex structures on products of spheres are constructed.

Key words: 6-manifolds, almost complex structures, Cayley numbers, vector cross product.

Литература

1. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans AMS. – 1969. – V. 141. – P. 465–504.
2. *Bryant R.* Submanifolds and special structures on the octonians // J. Diff. Geom. – 1982. – V. 17. – P. 185–232.
3. *Calabi E.* Construction and properties of some 6-dimensional almost-complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 87. – P. 407–438.
4. *Calabi E., Gluck H.* What are best almost-complex structures on te 6-sphere? // Proc. Symp. in Pure Math. – 1993. – V. 54, No 2. – P. 99–108.
5. *LeBrun C.* Orthogonal complex structures on S^6 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 101, No 1. – P. 136–138.
6. *Sekigawa K.* Almost complex submanifolds of a 6-dimensional sphere // Kodai Math. J. – 1983. – V. 6, No 2. – P. 174–185.
7. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. – М.: Наука, 1981.
8. *Peng C.K., Tang Z.* Integrability Condition on an Almost Complex Structure and Its Application // Acta Math. Sinica, English Series. – 2005. – V. 21, No 6. – P. 1459–1464.
9. *Datta B., Subramanian S.* Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres // Topol. and its Appl. – 1990. – V. 36, No 1. – P. 39–42.
10. *Bor G., Hernandez-Lamoneda L.* The canonical bundle of hermitian manifold // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 1999. – V. 5, No 3. – P. 187–198.
11. *Смоленцев Н.К.* О почти комплексных структурах на сфере S^6 // Вестн. Кемер. гос. ун-та. Сер. Матем. – 2005. – № 4. – С. 155–162.
12. *Harvey R., Lawson H.* Calibrated geometries // Acta Math. – 1982. – No 148. – P. 47–157.
13. *Hitchin N.J.* The geometry of three-forms in six dimensions // J. Diff. Geom. – 2000. – V. 55. – P. 547–576.
14. *Hopf H.* Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten // Studies and Essays presented to R. Courant. – N. Y.: Interscience, 1948. – P. 167–185.
15. *Gray A., Harvella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear Invariants // Ann. Math. Pura Appl. – 1980. – V. 123. – P. 35–58.
16. *Butruille J.-B.* Homogeneous nearly Kähler manifolds. – Math.DG/0604394. – 2006. – 25 p.

Поступила в редакцию
07.09.09

Смоленцев Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Кемеровского государственного университета.

E-mail: *smolen@kuzbass.net*